12

สมการแมกซ์เวลล์

หลักมูลฐานของแม่เหล็กไฟฟ้าบอกให้เราทราบว่า สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กมีความสัมพันธ์ต่อกันและสัมพันธ์ต่อประจุและกระแสไฟฟ้าอย่างไร ความสัมพันธ์มูลฐานเหล่านี้สรุปโดยกฎของเกาส์สำหรับไฟฟ้า กฎของเกาส์สำหรับแม่เหล็ก กฎของแอมแปร์ และกฎของฟาราเดย์ ความสัมพันธ์ทางคณิตศาสตร์ที่ใช้บรรยายกฎทั้งสี่ เรียกว่า สมการของแมกซ์เวลล์ (Maxwell's equation) เพราะแมกซ์เวลล์ (James Clerk Maxwell) เป็นผู้รวบรวมและมีส่วนพัฒนาขึ้นในปี ค.ศ.1865

แมกซ์เวลล์แสดงให้เห็นว่ากฎของแอมแปร์ไม่สมบูรณ์ และได้เสนอว่าควรจะแก้ไขข้อบกพร่องได้อย่างไร เป็นคนแรกที่เสนอสมการคณิตศาสตร์ 4 สมการซึ่งใช้บรรยายปรากฏ-การณ์แม่เหล็กไฟฟ้าได้อย่างลึกซึ้งและสมบูรณ์ครอบคลุม และอาศัยสมการทั้งสี่ทำนายว่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะแผ่ออกไปด้วยอัตราเร็วเท่ากับอัตราเร็วของแสง ผ่านสุญญากาศในรูปของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

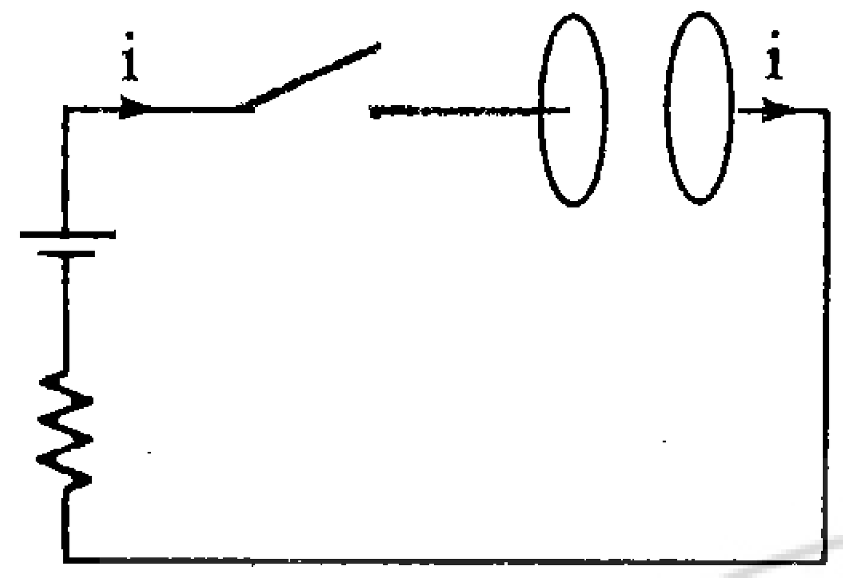
12.1 รูปทั่วไปของกฎแอมแปร์

ตามกฎของแอมแปร์ สนามแม่เหล็กจะถูกสร้างขึ้นได้โดยกระแสไฟฟ้าซึ่งมีข้อสรุปว่า อินทิกรัลเส้นของสนามแม่เหล็กรอบวงปิดใด ๆ $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$ จะเท่ากับผลคูณของสภาพให้ซึมได้ของสุญญากาศ μ_0 กับกระแสสุทธิที่ผ่านพื้นที่ที่ถูกล้อมรอบด้วยวงปิดนั้น [สมการ (8-9)]

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$$

ตามกฎข้างบนจะใช้กับสนามแม่เหล็กที่เกิดจากประจุที่เคลื่อนที่เท่านั้น ต่อไปนี้เราจะเห็นว่ากฎของแอมแปร์สามารถจะขยายให้ครอบคลุมใช้กับสนามแม่เหล็กที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของสนามไฟฟ้าได้ด้วย หรือ กล่าวให้ชัดเจนยิ่งขึ้นก็คือ สามารถใช้กับสนามแม่เหล็กที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์ของสนามไฟฟ้า

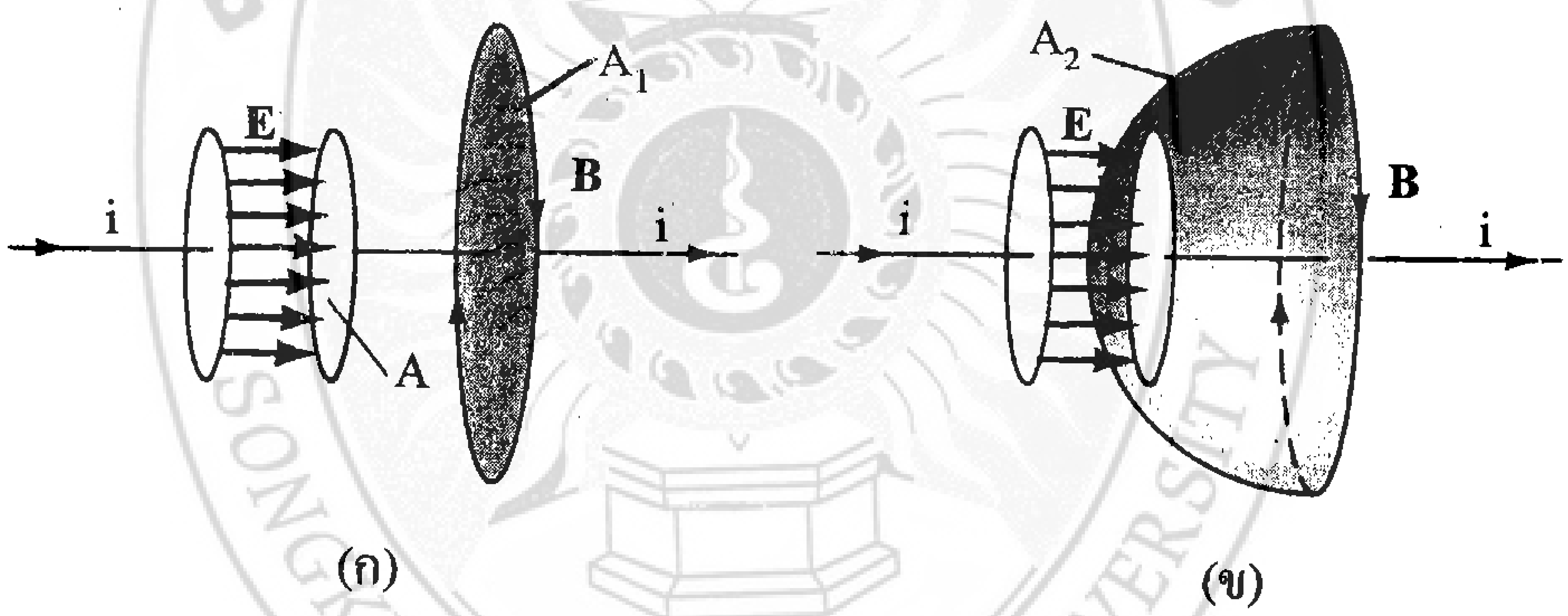
พิจารณาวงจรอย่างง่าย รูปที่ 12.1 ตัวเก็บประจุแผ่นขนานกำลังถูกประจุโดยการปิดสวิตซ์ ผลที่เกิดขึ้นชั่วครู่ก็คือกระแสไฟฟ้าจะเพิ่มจากศูนย์จนถึงค่าสูงสุด และลดลงเป็นศูนย์อีกครั้งเมื่อตัวเก็บประจุถูกประจุเต็ม



รูปที่ 12.1

ตัวเก็บประจุแผ่นขนานกำลังจะถูกประจุโดยการปิดสวิตซ์ ทันทีที่ปิดสวิตซ์ กระแสไฟฟ้า i จะเปลี่ยนแปลงตามเวลา

ในช่วงเวลาที่กระแสไฟฟ้ากำลังเปลี่ยนแปลง จะเปลี่ยนแปลงเฉพาะในเส้นลวดตัวนำเท่านั้น จะไม่มีกระแสไฟฟ้าที่แท้จริงผ่านในบริเวณระหว่างแผ่นเพลทของตัวเก็บประจุแต่อย่างใด หรือไม่มีประจุผ่านระหว่างแผ่นเพลท



รูปที่ 12.2 *การใช้กฎของแอมแปร์กับตัวเก็บประจุที่กำลังถูกประจุ (ก) วงปิดเป็นวงกลมล้อมพื้นที่ระนาบ A_1 มีกระแสไฟฟ้าจริงผ่านพื้นที่ A_1 สนามแม่เหล็ก **B** วนตามแนววงปิด (ข) วงปิดเป็นวงเดิมแต่คิดพื้นที่ที่ถูกล้อมเป็นผิวรูปครึ่งทรงกลม A_2 ไม่มีกระแสไฟฟ้าจริงผ่านพื้นที่ A_2 ขณะที่สนามแม่เหล็ก **B** ยังคงวนเป็นวงปิดเดียวกับข้อ (ก)*

หากใช้กฎของแอมแปร์ $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$ กับเส้นรอบวงปิดเป็นวงกลมล้อมรอบผิวระนาบ A_1 รูปที่ 12.2 (ก) พื้นที่ผิว A_1 มีกระแสไฟฟ้า i ผ่าน วงสนามแม่เหล็กที่เกิดขึ้นจะวนตามแนววงปิด เนื่องจากอินทิกรัลเส้นของสนามแม่เหล็กรอบวงปิดตามกฎของแอมแปร์จะไม่ขึ้นกับรูปร่างของพื้นที่ผิวที่ถูกล้อมด้วยวงปิด ดังนั้นเมื่อเลือกวงปิดเดิมแต่เลือกพื้นที่ผิวที่ถูกล้อมเป็นพื้นที่ผิวรูปทรงกลม A_2 โดยมีส่วนหนึ่งของพื้นที่ผ่านอยู่ระหว่างแผ่นเพลท รูปที่ 12.2 (ข)

จึงไม่มีกระแสไฟฟ้าจริงผ่านพื้นที่ผิว A_2 แต่ยังคงมีสนามแม่เหล็ก **B** วนตามแนววงปิดเดียวกับกรณีแรก จึงเห็นได้ว่ากฎของแอมแปร์ไม่ครอบคลุมสถานะการณ์ตามรูปที่ 12.2 (ข)

แมกซ์เวลล์สร้างแนวความคิดเพื่อขยายกฎของแอมแปร์ให้เป็นกฎทั่วไปขึ้นดังนี้ **เมื่อไม่มีกระแสไฟฟ้าจริง ฟลักซ์ของสนามไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงอยู่ระหว่างแผ่นเพลทของตัวเก็บประจุสามารถทำตัวเป็นกระแสที่ไม่มีตัวตน เรียกว่า กระแสเอฟเฟคตีฟ (effective current) หรือ กระแสดิสเพลสเมนต์ (displacement current) สร้างสนามแม่เหล็กขึ้นได้** รากฐานความคิดของแมกซ์เวลล์ประการหนึ่งก็คือ หลักการสมมาตร กล่าวคือ **เมื่อฟลักซ์สนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงสร้างสนามไฟฟ้าได้** (กฎของฟาราเดย์) **ในทางกลับกันก็ควรจะเป็นไปได้ด้วย**

ตามแนวความคิดนี้ กระแสดิสเพลสเมนต์ i_d เป็นแบบเดียวกับกระแสจริง i กฎแอมแปร์จึงเขียนเป็น

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (i + i_d) \qquad \text{..........} \qquad (12\text{-}1)$$

เพราะความต่อเนื่องของกระแสไฟฟ้า สถานะการณ์ตามรูปที่ 12.2 จึงสรุปได้ว่า

$$i\,(\text{ในลวดตัวนำ}) = i_d\,(\text{ระหว่างแผ่นเพลท})$$

ตามนิยามของฟลักซ์ไฟฟ้า [สมการ (2-10)]คือ

$$\varnothing_E = \int \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

เมื่อ **E** เป็นสนามไฟฟ้าที่ผ่านส่วนพื้นที่ dS กระแสไฟฟ้าขณะใด ๆ $i = dq/dt$ เป็นอัตราที่ประจุผ่านพื้นที่หน้าตัดใด ๆ ของตัวนำจะเท่ากับอัตราการสะสมของประจุที่สะสมบนแผ่นเพลท สนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นเพลทพื้นที่ A จะสัมพันธ์กับประจุ q บนแผ่นเพลท (หัวข้อ 4.1.1)

$$E = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

ดังนั้น $q = \epsilon_0 EA = \epsilon_0 \varnothing_E$ เมื่อ EA เป็นฟลักซ์ไฟฟ้า $\varnothing_E$ ที่ผ่านอยู่ระหว่างแผ่นเพลทของตัวเก็บประจุ

กระแสดิสเพลสเมนต์จึงเป็น

$$i_d = i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(\epsilon_0 \varnothing_E) = \epsilon_0 \frac{d\varnothing_E}{dt} \quad \text{..........} \quad (12\text{-}2)$$

แทน i_d ตามความสัมพันธ์ข้างบนในสมการที่ (12-1) จึงได้รูปทั่วไปของกฎแอมแปร์หรือเรียกว่า กฎของแอมแปร์-แมกซ์เวลล์ คือ

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (i + \epsilon_0 \frac{d\varnothing_E}{dt}) = \mu_0 i + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\varnothing_E}{dt} \quad \text{..........} \quad (12\text{-}3)$$

ความสัมพันธ์ตามสมการ (12-3) บ่งบอกว่า นอกจากกระแสไฟฟ้าจะสร้างสนามแม่เหล็กขึ้นได้แล้ว การเปลี่ยนแปลงฟลักซ์ไฟฟ้ายังสร้างสนามแม่เหล็กได้ด้วย แม้ผลตามสมการ (12.3) ได้มาจากกรณีเฉพาะจากการพิจารณาการประจุตัวเก็บประจุแผ่นขนานก็ตาม รูปทั่วไปของกฎแอมแปร์ที่รวมเอาผลการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์ไฟฟ้าไว้ด้วย ยังคงเป็นจริงทุกสถานะการณ์

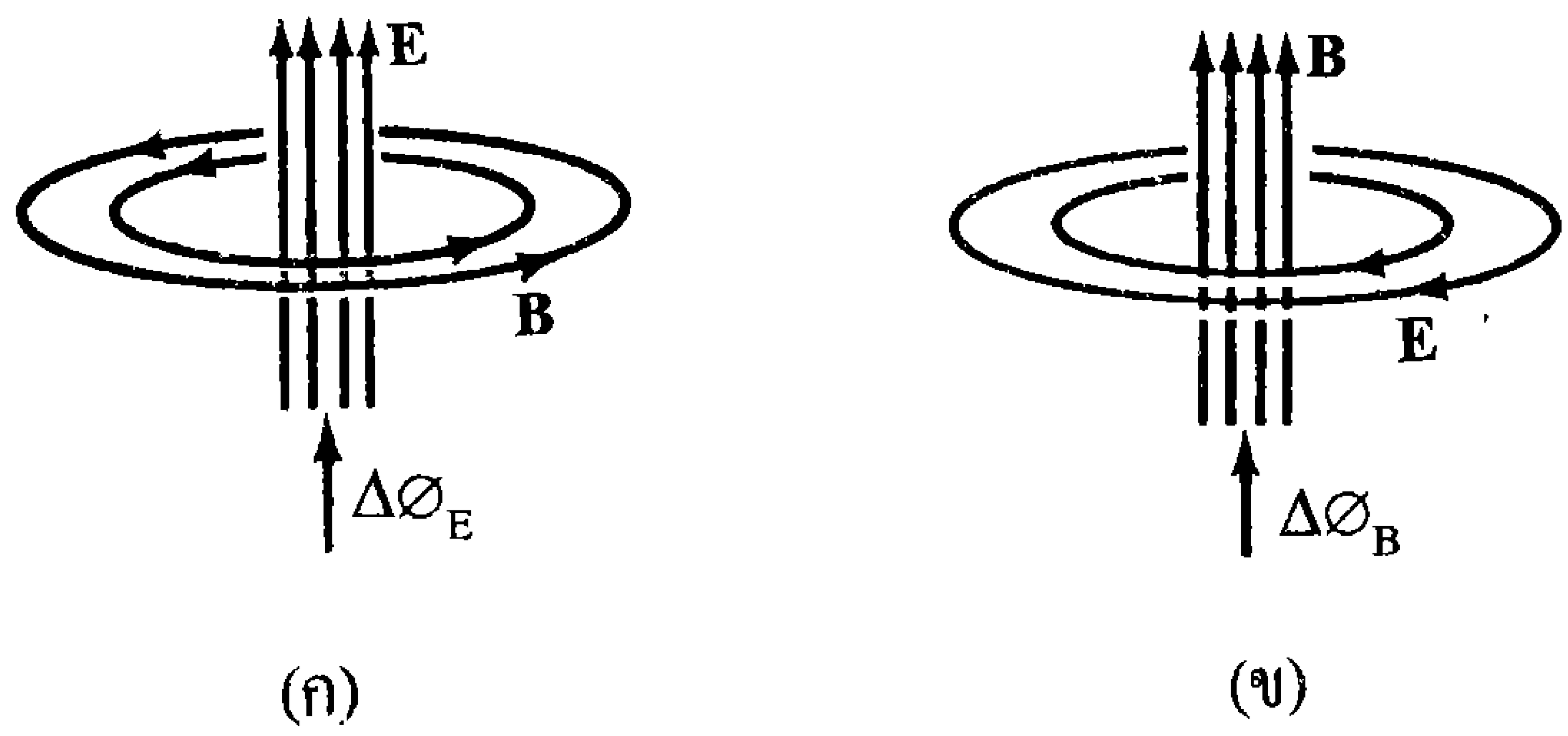
หากเป็นบริเวณที่ไม่มีประจุไฟฟ้าหรือกระแสไฟฟ้า สนามแม่เหล็กจะเกิดขึ้นจากการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์ไฟฟ้าเพียงอย่างเดียว สมการ (12-3) จึงลดรูปเป็น

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\varnothing_E}{dt} \quad \text{..........} \quad (12\text{-}4)$$

รูปแบบของสมการ (12-4) จะคล้ายกับกฎของฟาราเดย์ที่บ่งบอกว่า สนามไฟฟ้าสร้างขึ้นจากการเปลี่ยนแปลงของฟลักซ์แม่เหล็ก [สมการ (9-9)]

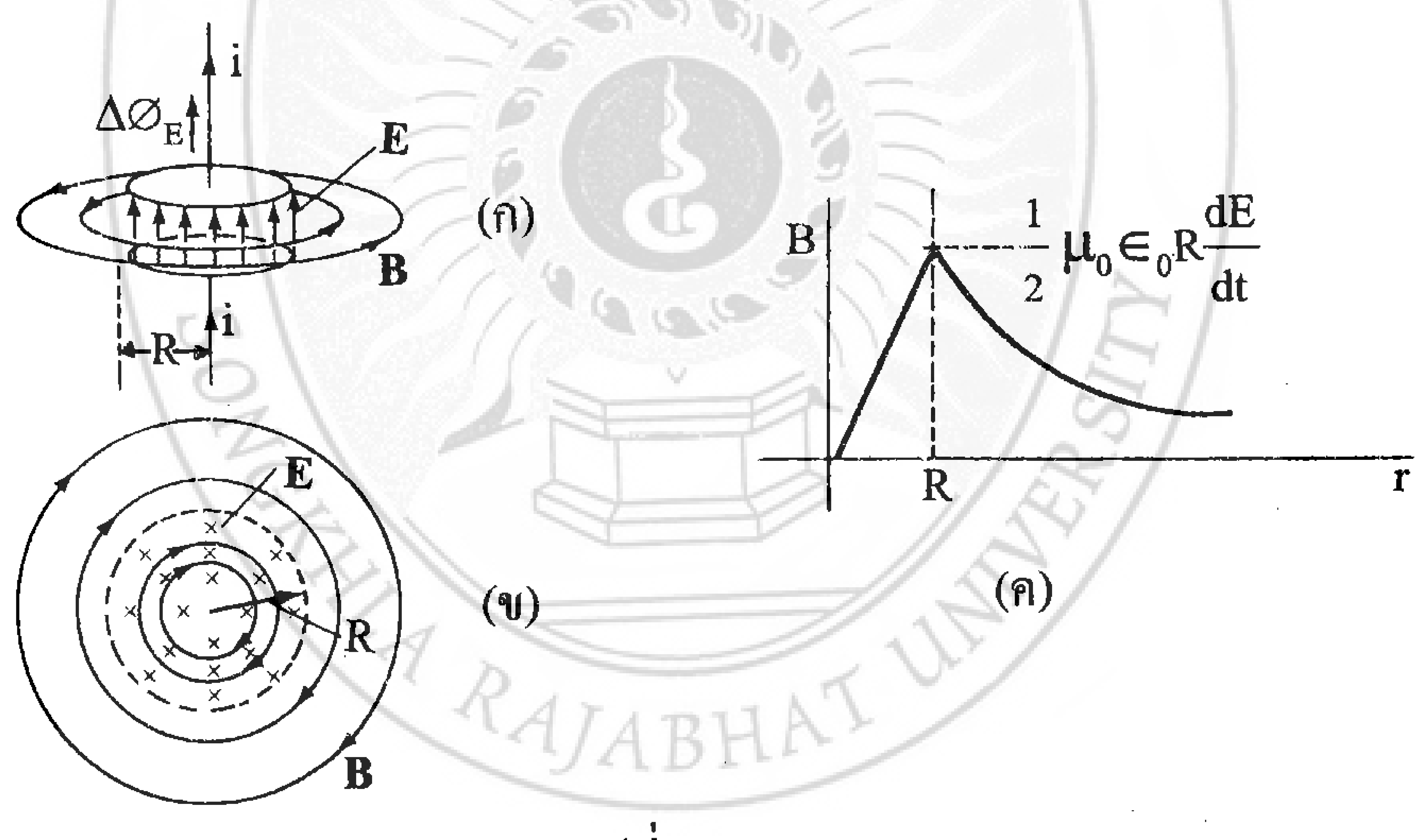
$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\varnothing_B}{dt}$$

ทั้งสองสถานะการณ์แสดงตามรูปที่ (12.3) รูปที่ 12.3 (ก) วงสนามแม่เหล็ก **B** ล้อมบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์ไฟฟ้า $\varnothing_E$ ทิศทางของวงสนามแม่เหล็กสัมพันธ์กับทิศการเพิ่มของฟลักซ์ไฟฟ้า $\varnothing_E$ หาได้โดยการใช้หลักมือขวา ซึ่งจะเหมือนกับทิศทางของวงสนามแม่เหล็ก **B** สัมพันธ์กับทิศของกระแสไฟฟ้าจริง รูปที่ 12.3 (ข) วงสนามไฟฟ้า **E** ล้อมบริเวณที่มีการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็ก ทิศทางของวงสนามไฟฟ้าสัมพันธ์กับทิศการเพิ่มของฟลักซ์แม่เหล็ก $\varnothing_B$ โดยการใช้หลักมือซ้าย (เป็นผลเนื่องมาจากกฎของเลนส์) ผลที่แตกต่างกันในเรื่องทิศของวงสนามแม่เหล็กและวงสนามไฟฟ้าที่ปรากฏในสมการ (12-4) และสมการ (9-9) คือ สมการหนึ่งมีเครื่องหมายบวก อีกสมการหนึ่งมีเครื่องหมายลบ



รูปที่ 12.3 *(ก) วงสนามแม่เหล็ก **B** ล้อมบริเวณที่ฟลักซ์ไฟฟ้ามีการเปลี่ยนแปลง (หลักมือขวา) (ข) วงสนามไฟฟ้า **E** ล้อมบริเวณที่ฟลักซ์แม่เหล็ก $\varnothing_B$ มีการเปลี่ยนแปลง (หลักมือซ้าย)*

ตัวอย่างที่ 12.1 ตัวเก็บประจุแผ่นขนานมีแผ่นเพลทเป็นวงกลมรัศมี R ถูกประจุด้วยอัตราคงที่ สมมติว่าสนามไฟฟ้ามีอยู่เฉพาะในบริเวณระหว่างแผ่นเพลท ดังรูปที่ 12.4 (ก) ให้หา (ก) ขนาดของสนามแม่เหล็กที่ระยะ r ใด ๆ จากจุดศูนย์กลางของตัวเก็บประจุ (ข) สนามแม่เหล็กสูงสุด เมื่อรัศมีของแผ่นเพลท R = 10 cm และสนามไฟฟ้าเปลี่ยนในอัตรา $dE/dt = 10^{10}$ V/m.s



รูปที่ 12.4

วิธีทำ ก) เมื่อ r < R (ภายในบริเวณสนามไฟฟ้า) จากสมการ (12-4) จะได้ว่า

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \in_0\mu_0\frac{d\varnothing_E}{dt}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0\in_0\frac{d}{dt}[(E)(\pi r^2)]$$

$$B = \frac{1}{2}\mu_0\epsilon_0 r\frac{dE}{dt}$$

เมื่อ $r = R$ จากผลข้างบนจะได้ว่า

$$B = \frac{1}{2}\mu_0\epsilon_0 R\frac{dE}{dt}$$

เมื่อ $r > R$ (นอกบริเวณสนามไฟฟ้า) จากสมการ (12-4) จะได้ว่า

$$B(2\pi r) = \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}[(E)(\pi R^2)]$$

$$B = \frac{1}{2}\frac{\mu_0\epsilon_0 R^2}{r}\frac{dE}{dt}$$

ทิศทางของวงสนามแม่เหล็กแสดงดังรูปที่ 12.4 (ข) ขนาดของสนามแม่เหล็กแสดงตามรูปที่ 12.4 (ค) เมื่อ $r < R$ สนามแม่เหล็กจะเพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอตาม r ที่ $r = R$ สนามแม่เหล็กมีค่าสูงสุด และมีค่าลงผกผันกับ r เมื่อ $r > R$ ซึ่งจะเห็นว่าผลตามตัวอย่างนี้จะเหมือนกับผลตามตัวอย่างที่ 9.6 ในกรณีของกฎฟาราเดย์

ข) จากข้อ (ก) สนามแม่เหล็กมีค่าสูงสุดเมื่อ $r = R$ จะได้ว่า

$$B = \frac{1}{2}\mu_0\epsilon_0 R\frac{dE}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}[8.9 \times 10^{-12} C^2/N.m^2)(4\pi \times 10^{-7} T.m/A)(0.10m)(10^{10} V/m.s)]$$

$$= 5.6 \times 10^{-9} T = 0.056 mG$$

ผลตามข้างบนนี้แสดงให้เห็นว่าสนามแม่เหล็กมีค่าน้อยมาก แม้ว่าอัตราการเปลี่ยนของฟลักซ์ไฟฟ้าที่สัมพันธ์กันจะเปลี่ยนในอัตราสูง จะเป็นผลที่ตรงกันข้ามกับสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำ ซึ่งเกิดจากการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์แม่เหล็ก จะได้แรงเคลื่อนไฟฟ้าที่สัมพันธ์กันมีค่าอยู่ในระดับขนาดเป็นโวลต์

12.2 สมการแมกซ์เวลล์

สมการแมกเวลล์เป็นหลักมูลฐานที่ใช้อธิบายปรากฏการณ์แม่เหล็กไฟฟ้า เช่นเดียวกับกฎของนิวตันใช้อธิบายปรากฏการณ์ทางกลศาสตร์ โดยความเป็นจริงแล้วสมการที่แมกเวลล์

พัฒนาขึ้นได้ก้าวไกลเกินกว่าที่แมกเวลล์ได้จินตนาการเอาไว้ เพราะในปี ค.ศ. 1905 ไอน์สไตน์ยืนยันว่าผลตามสมการของแมกเวลล์เข้ากันได้กับทฤษฎีสัมพัทธภาพ เราจะพบว่าสมการของแมกซ์เวลล์เป็นกฎของแม่เหล็กไฟฟ้าที่ผ่านมาแล้วทั้งสิ้น อย่างไรก็ตามนอกจากแมกซ์เวลล์จะเป็นผู้รวบรวมและพัฒนาเพิ่มเติมแล้ว ยังอาศัยสมการทั้ง 4 ทำนายการเกิดคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า (แบบแผนการเคลื่อนที่ของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก) ว่าเคลื่อนที่ไปในสุญญากาศด้วยอัตราเร็ว $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \approx 3 \times 10^8$ m/s เท่ากับอัตราเร็วของแสง และยิ่งกว่านั้นยังทำนายว่าประจุที่มีความเร่งจะแผ่คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าได้

เพื่อให้ง่ายขึ้น จะแสดงกฎของแมกซ์เวลล์กับกรณีสุญญากาศ หรือสำหรับบริเวณที่ไม่มีสารไดอิเล็กทริก หรือสารแม่เหล็ก ดังนี้

สมการที่ 1 ชื่อทั่วไปของสมการ **กฎของเกาส์สำหรับไฟฟ้า** กล่าวว่า **ฟลักซ์ไฟฟ้าสุทธิที่ผ่านผิวปิดใด ๆ จะเท่ากับประจุสุทธิภายในผิวปิดหารด้วย** ϵ_0

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad \text{..........} \quad (12\text{-}5)$$

กฎนี้โยงความสัมพันธ์ระหว่างสนามไฟฟ้ากับการกระจายของประจุ กฎนี้สามารถหาได้จากกฎของคูลอมบ์ จึงเป็นทางเลือกหนึ่งของคำกล่าวที่ว่า แรงระหว่างประจุแปรผกผันกับระยะระหว่างประจุยกกำลังสองนั่นเอง หลักฐานการทดลองเบื้องต้นที่ยืนยันกฎนี้ คือ ภายใต้ภาวะสมดุลทางไฟฟ้าสถิตจะไม่มีประจุสุทธิใด ๆ ขึ้นภายในตัวนำกลวง เส้นสนามไฟฟ้าจะออกจากประจุบวกและสิ้นสุดที่ประจุลบ

สมการที่ 2 ชื่อทั่วไปของสมการ **กฎของเกาส์สำหรับแม่เหล็ก** กล่าวว่า **ฟลักซ์แม่เหล็กสุทธิที่ผ่านผิวปิดใด ๆ เป็นศูนย์**

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \text{..........} \quad (12\text{-}6)$$

นั่นคือ เส้นสนามแม่เหล็กที่พุ่งเข้าสู่ปริมาตรภายในผิวปิด จะพุ่งออกจากปริมาตรภายในผิวปิดเท่าเดิม เป็นการบ่งชี้ว่าเส้นสนามแม่เหล็กจะไม่เริ่มต้นและสิ้นสุดที่จุดใด หรือเท่ากับกล่าวว่าเส้นสนามแม่เหล็กวนเป็นวงปิด ถ้าฟลักซ์แม่เหล็กสุทธิที่ผ่านผิวปิดใด ๆ ไม่เป็นศูนย์ จะต้องมีขั้วแม่เหล็กหรือมีแม่เหล็กขั้วเดี่ยวที่เป็นจุดเริ่มต้นและสิ้นสุดของเส้นสนามแม่เหล็ก หลักฐานที่เป็นรากฐานของกฎนี้ก็คือไม่เคยพบว่ามีขั้วแม่เหล็กเดี่ยวอยู่ในธรรมชาติ

สมการที่ 3 ชื่อทั่วไปของสมการ **กฎของฟาราเดย์หรือกฎ การเหนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้าของฟาราเดย์** กล่าวว่า **อินทิกรัลเส้นของสนามไฟฟ้ารอบวงปิด** (ซึ่งเท่ากับแรงเคลื่อนไฟฟ้า) **เท่ากับอัตราการเปลี่ยนของฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านพื้นที่ที่ล้อมรอบด้วยวงปิดนั้น**

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\varnothing_B}{dt} \qquad \text{..........} \quad (12\text{-}7)$$

กฎนี้ยืนยันโดยปรากฏการณ์การเหนี่ยวนำแม่เหล็กไฟฟ้า ตัวอย่างเช่น ปรากฏการณ์ที่มีกระแสเหนี่ยวนำเกิดขึ้นในวงตัวนำเมื่ออยู่ในสนามแม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา

สมการที่ 4 ชื่อทั่วไปของสมการ **กฎของแอมแปร์หรือกฎของแอมแปร์-แมกซ์เวลล์** กล่าวว่า **อินทิกรัลเส้นของสนามแม่เหล็กรอบวงปิดใด ๆ จะเท่ากับ μ_0 เท่าของกระแสไฟฟ้าสุทธิที่ผ่านวงปิดรวมกับ $\mu_0\epsilon_0$ เท่าของอัตราการเปลี่ยนฟลักซ์ไฟฟ้าที่พุ่งผ่านพื้นที่ล้อมด้วยวงปิดนั้น**

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i + \mu_0\epsilon_0 \frac{d\varnothing_E}{dt} \qquad \text{..........} \quad (12\text{-}8)$$

ตามกฎของแอมแปร์บ่งบอกว่า สนามแม่เหล็กจะเกิดจากกระแสไฟฟ้าหรือประจุที่เคลื่อนที่และเกิดจากการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์ไฟฟ้า ปรากฏการณ์การเกิดแรงแม่เหล็กระหว่างตัวนำที่มีกระแสไฟฟ้าผ่านเป็นการยืนยันว่า สนามแม่เหล็กเกิดจากการเคลื่อนที่ของประจุ หลักฐานสำคัญที่ยืนยันว่า สนามแม่เหล็กสร้างขึ้นโดยการเปลี่ยนแปลงฟลักซ์ไฟฟ้า คือ คุณสมบัติของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า

ข้อสังเกตที่น่าสนใจยิ่งประการหนึ่งก็คือ ลักษณะของความสมมาตรในสมการของแมกซ์เวลล์ สมการ (12-5) เกือบจะสมมาตรกับสมการ (12-6) ต่างกันที่ไม่มีเทอมแสดงถึงขั้วแม่เหล็กเดี่ยวในสมการ (12-6) สมการ (12-7) กับสมการ (12-8) สมมาตรกันในลักษณะที่ว่าอินทิกรัลเส้นของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กรอบเส้นทางปิดสัมพันธ์กับอัตราการเปลี่ยนของฟลักซ์แม่เหล็กและฟลักซ์ไฟฟ้า ตามลำดับ

เป็นที่ยอมรับกันว่า สมการของแมกซ์เวลล์ ร่วมกับสมการของแรงโลเร็นต์ $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ จะให้คำอธิบายถึงอันตรกิริยาทั้งหลายเกี่ยวกับแม่เหล็กไฟฟ้าแผนเดิม (classical electromagnetism) ได้อย่างสมบูรณ์

สำหรับอวกาศที่ไม่มีทั้งประจุไฟฟ้า q และกระแสไฟฟ้า i สมการทั้ง 4 จะลดรูปเป็น

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\varnothing_B}{dt}$$

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\varnothing_E}{dt}$$

สองสมการแรกให้ความหมายว่า ทั้งสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะมีรูปร่างเป็นวงปิด สมการที่ 3 (กฎของฟาราเดย์) ให้ความหมายว่า ฟลักซ์แม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงสร้างสนามไฟฟ้า และสมการที่ 4 (กฎของแอมแปร์) ให้ความหมายในทางกลับกัน คือ ฟลักซ์ไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงจะสร้างสนามแม่เหล็ก

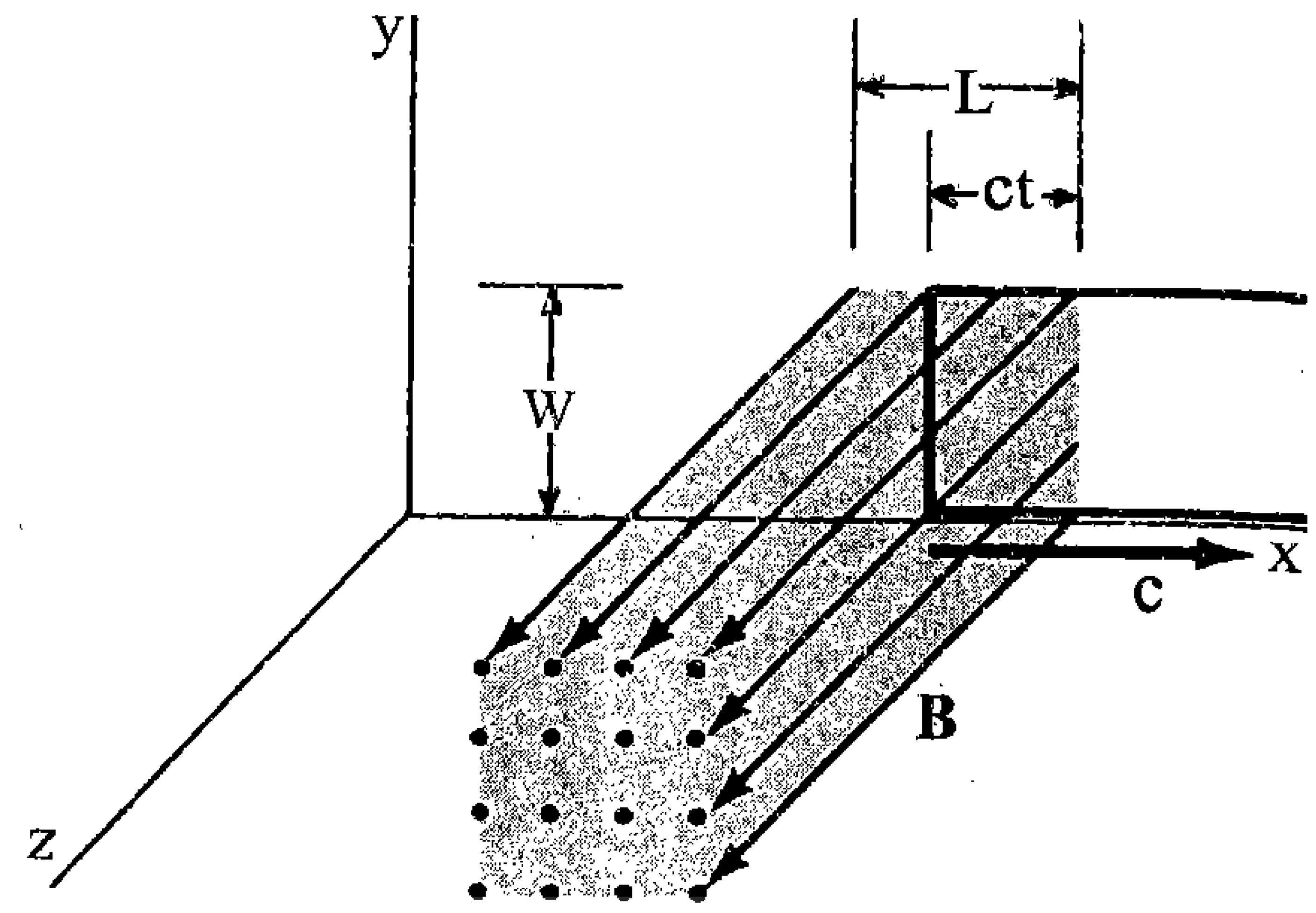
12.3 คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจากสมการของแมกซ์เวลล์

หนึ่งในบรรดาการทำนายปรากฏการณ์ที่จะเกิดขึ้น โดยใช้ทฤษฎีทางฟิสิกส์ที่มีชื่อเสียงตลอดมา ก็คือ การทำนายของแมกซ์เวลล์ในปี 1865 เมื่อแมกซ์เวลล์รวมสมการทั้ง 4 สมการเข้าด้วยกันโดยใช้วิธีวิเคราะห์ทางคณิตศาสตร์ ได้สมการมีลักษณะเป็นสมการคลื่น (wave equation) จากสมการคลื่นและผลที่ได้จากการถอดสมการ แมกซ์เวลล์ทำนายว่า จะมีสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเกิดขึ้นในอวกาศที่ไกลจากประจุและกระแสไฟฟ้า สนามจะแผ่ออกไปในรูปคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าด้วยอัตราเร็วเท่ากับอัตราเร็วของแสง

ด้วยวิธีการต่อไปนี้ (โดยไม่ใช้สมการของคลื่น) จะแสดงให้เห็นว่า สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าแผ่ออกไปในอวกาศด้วยอัตราเร็วของแสงโดยไม่ต้องอาศัยประจุไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้า วิธีการนี้อยู่บนแนวความคิดว่า

- เริ่มต้นสมมติว่า พัลส์ (pulse) ของสนามแม่เหล็กสามารถเดินผ่านอวกาศและหาว่าต้องมีสนามไฟฟ้าร่วมอยู่ด้วย
- จากนั้นคิดในทางตรงกันข้ามจินตนาการว่าพัลส์ของสนามไฟฟ้าเดินผ่านอวกาศและหาว่ามีสนามแม่เหล็กรวมอยู่ด้วย

สมมติว่าพัลส์คงที่ของสนามแม่เหล็ก **B** มีทิศพุ่งไปทางแกน z ส่งออกไปในทิศแกน x ด้วยอัตราเร็ว c ดังรูปที่ 12.5 พัลส์สนามแม่เหล็กถูกส่งออกไปได้อย่างไรไม่ต้องคำนึงถึงความหนาของพัลส์สนามแม่เหล็กจากขอบหน้าถึงขอบหลังเป็น L ส่วนตามแนวแกน y และ



รูปที่ 12.5 *พัลส์ของสนามแม่เหล็กคงที่ B ทิศ +z มีความหนา L เคลื่อนที่ไปตามทิศ +x ด้วยอัตราเร็ว c*

ที่มา : *Weidner 1985 : 746*

แกน z สนามแม่เหล็ก **B** แผ่ออกไปได้โดยไม่มีขอบเขต นอกขอบเขตที่กล่าวถึงสนามแม่เหล็ก **B** = 0 (สนามแม่เหล็ก **B** ไม่สามารถจะบ่งชี้ว่ามีขนาดสม่ำเสมอและมีขอบเขตแผ่ออกไปโดยไม่จำกัดได้อย่างแท้จริง เนื่องจากวงสนามแม่เหล็กเป็นวงปิด ส่วนบริเวณที่เราพิจารณาเป็นบริเวณจำกัดที่เส้นสนามแม่เหล็กเป็นเส้นตรง)

พิจารณาวงสี่เหลี่ยมผืนผ้าในจินตนาการอยู่ในระนาบ xy มีความกว้างตามแนวแกน y เป็น W และมีความยาวไม่จำกัดตามแนวแกน x เราสมมติว่าขอบด้านหน้าของพัลส์สนามแม่เหล็ก **B** เข้าสู่ขอบซ้ายของวงสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่เวลา t = 0 ดังนั้นเมื่อเวลาผ่านไป t พัลส์สนามแม่เหล็กผ่านเข้าไปในวงสี่เหลี่ยมเป็นระยะ ct ฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านวงสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีการเปลี่ยนแปลงจะมีสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำเกิดขึ้น ขนาดสนามไฟฟ้าหาได้จากกฎของฟาราเดย์ดังนี้

ฟลักซ์แม่เหล็กที่ผ่านวงสี่เหลี่ยมที่เวลา t คือ

$$\varnothing_B = \oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S} = B\,(Wct)$$

อัตราการเปลี่ยนของฟลักซ์แม่เหล็กจึงเป็น

$$\frac{d\varnothing_B}{dt} = BWc$$

หลังจากเวลา $t = L/c$ ขอบหลังของพัลส์สนามแม่เหล็ก **B** จะผ่านเข้าไปอยู่ในวงสี่เหลี่ยมและต่อจากนี้ $\varnothing_B$ จะมีค่าคงที่

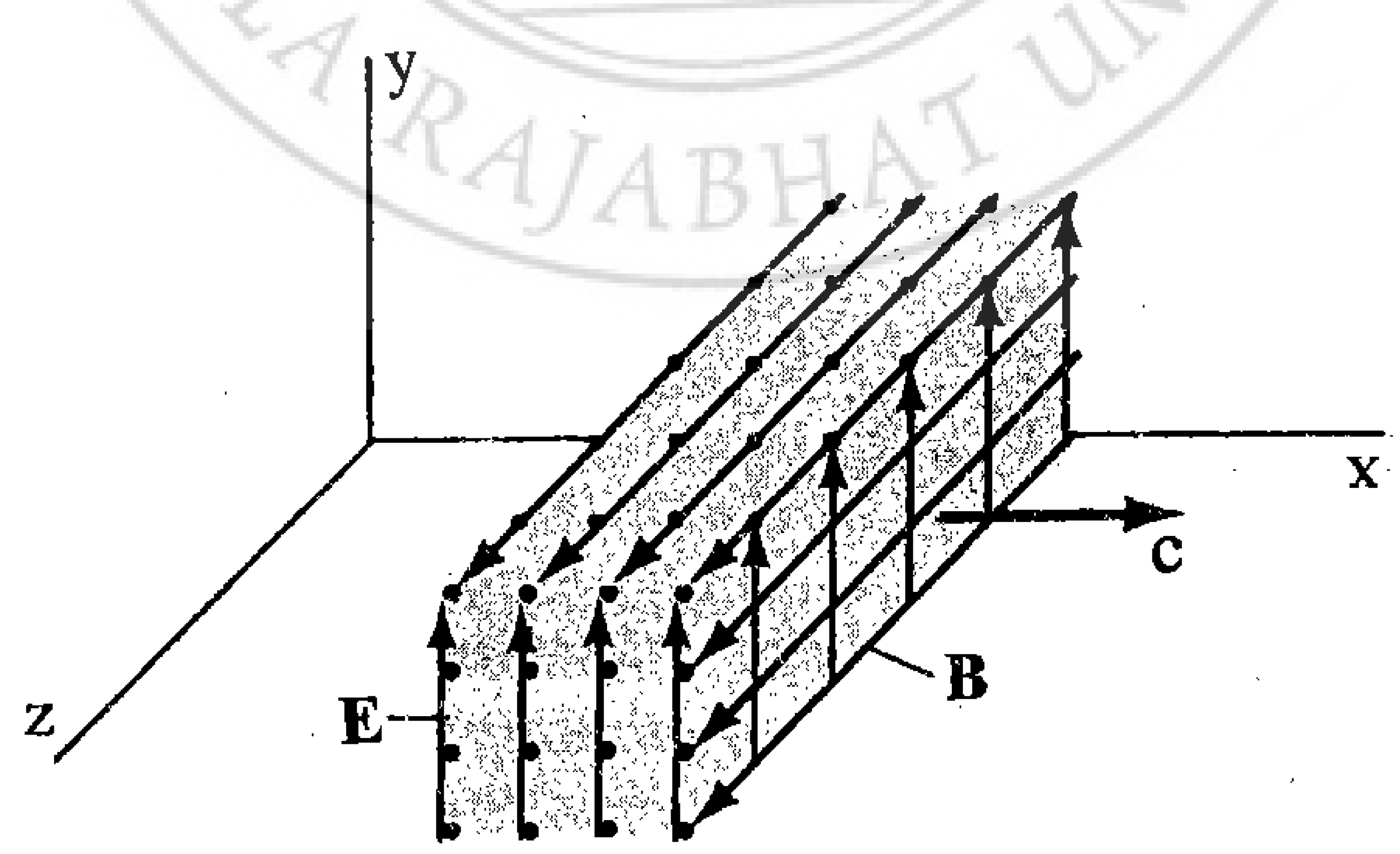
สำหรับทิศทางของสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำ หาได้จากกฎของเลนส์ โดยพิจารณาว่าวงสี่เหลี่ยมจินตนาการเป็นวงตัวนำ เมื่อมีฟลักซ์แม่เหล็กเปลี่ยนแปลงอยู่ภายใน จะเกิดกระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำขึ้นรอบวงตัวนำ ตามเงื่อนไขนี้กระแสไฟฟ้าเหนี่ยวนำจะมีทิศตามเข็มนาฬิกา ซึ่งเป็นทิศทางเดียวกันกับทิศของสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำ และสนามไฟฟ้าในวงตัวนำจะเริ่มต้นทางขอบซ้ายของวงตัวนำ อินทิกรัล $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ รอบวงสี่เหลี่ยมจินตนาการจะมีค่าเท่ากับอินทิกรัลส่วนที่เกิดจากขอบซ้ายของวงสี่เหลี่ยมเท่านั้น เพราะว่าขอบขวาของวงสี่เหลี่ยมอยู่ไกลมากจนถือว่าไม่มีสนามเกิดขึ้น และหากมีอินทิกรัลที่เกิดจากขอบบนโดยลักษณะสมมาตรก็จะมีอินทิกรัลส่วนที่เกิดจากขอบล่างหักล้างไปจนหมด ที่ขอบซ้ายของวงสี่เหลี่ยมสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำ **E** มีทิศ +y ซึ่งจะสวนกับทิศของการติดตามเส้นทางอินทิกรัลซึ่งติดตามในทิศทวนเข็มนาฬิกา อินทิกรัลของสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำ **E** รอบวงปิดสี่เหลี่ยมจินตนาการจึงเป็น

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -EW$$

จากกฎของฟาราเดย์ $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = -d\varnothing_B/dt$ จึงได้

$$EW = BWc$$

$$B = \frac{E}{c} \qquad \text{..........} \qquad (12\text{-}9)$$

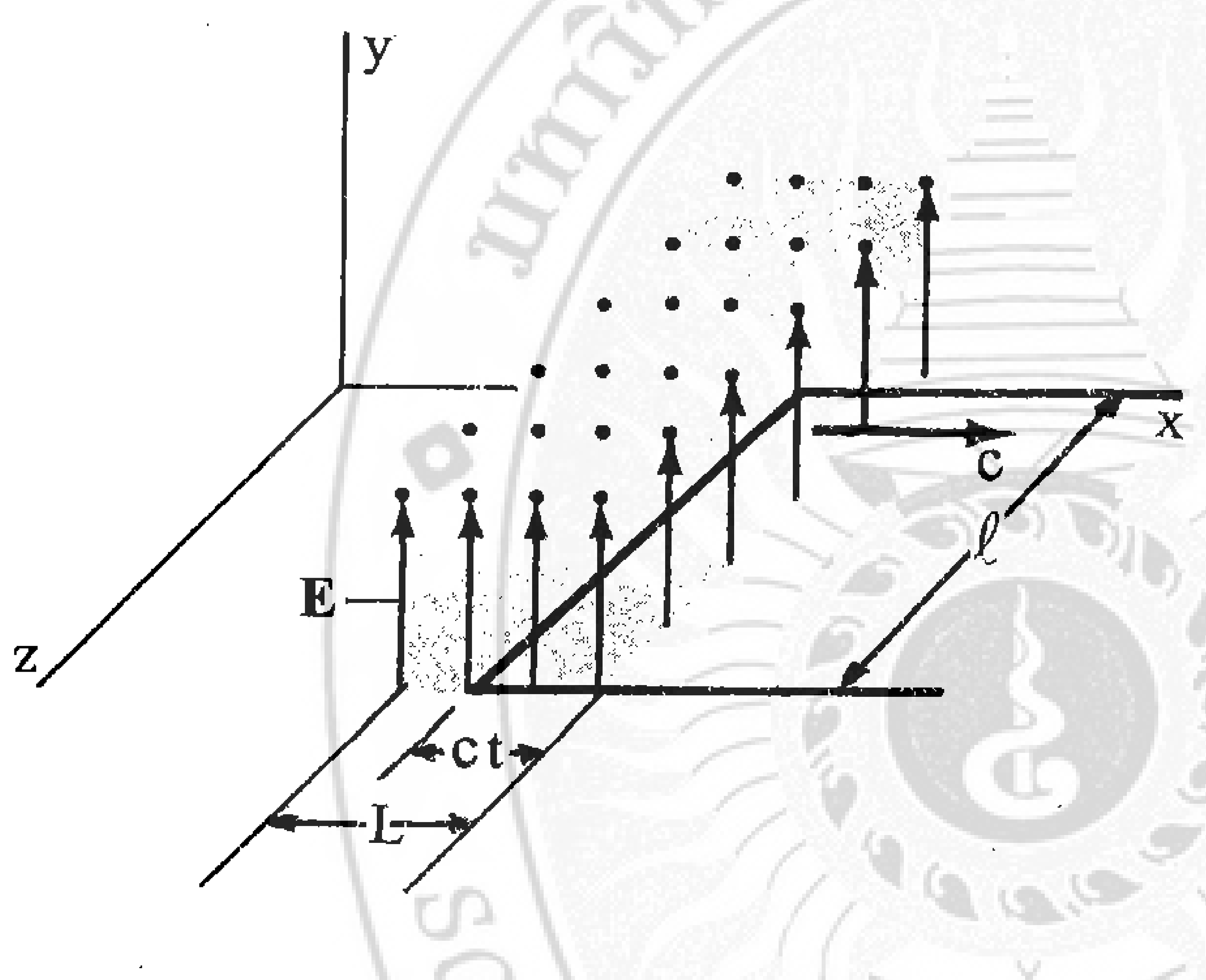


รูปที่ 12.6 *สนามแม่เหล็ก B ตามรูปที่ 12.5 มีสนามไฟฟ้า E ร่วมอยู่ด้วย ทิศไปตามแกน +y*

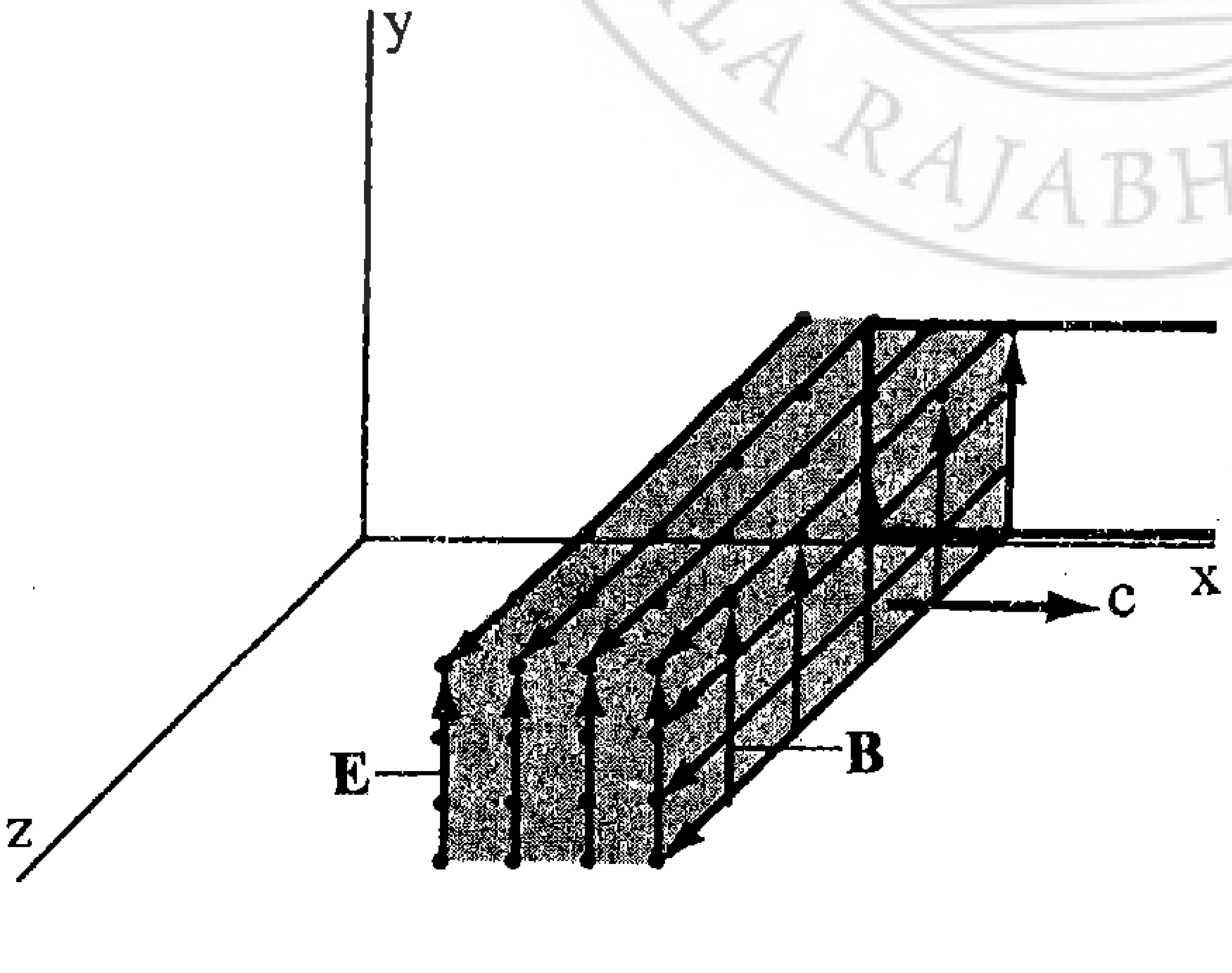
ที่มา : *Weidner 1985 : 747*

ตามสมการ (12-9) จะเห็นว่าสนามแม่เหล็กมีค่าน้อยกว่าสนามไฟฟ้าอยู่ 1/c เท่า ถึงตอนนี้เราสรุปได้ว่า พัลส์แม่เหล็กต้นกำเนิดจะต้องมีพัลส์สนามไฟฟ้าร่วมอยู่ด้วยในบริเวณเดียวกัน ดังรูปที่ 12.6 สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะตั้งฉากซึ่งกันและกัน และสนามทั้งสองจะตั้งฉากกับทิศที่พัลส์แม่เหล็กเคลื่อนที่ไป

การพิจารณาที่ผ่านมาเริ่มต้นด้วยการเคลื่อนที่ของสนามแม่เหล็ก **B** และโดยอาศัยกฎของฟาราเดย์ พบว่า จะต้องมีสนามไฟฟ้า **E** ร่วมอยู่ด้วย ต่อไปนี้เราพิจารณาในทางกลับกัน เริ่มด้วยพัลส์ของสนามไฟฟ้า **E** และพบว่าจะมีสนามแม่เหล็ก **B** รวมอยู่ด้วยโดยใช้กฎของแอมแปร์



(ก)



(ข)

รูปที่ 12.7

*(ก) สนามไฟฟ้า **E** ทิศตามแนว + y มีความหนา L เคลื่อนที่ไปตามทิศ + x ด้วยอัตราเร็ว c (ข) สนาม ไฟฟ้า **E** จะมีสนามแม่เหล็ก **B** ร่วมอยู่ด้วย ทิศไปตามแกน +z*

ที่มา : *Weidner 1985 : 748*

รูปที่ 12.7 (ก) แสดงพัลส์คงที่ของสนามไฟฟ้า **E** ชี้ไปในทิศ + y และเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว c ไปในทิศ + x พิจารณาวงสี่เหลี่ยมผืนผ้าในจินตนาการยาวไม่จำกัด กว้าง ℓ และอยู่ในระนาบ xz ระยะจากขอบหน้าและขอบหลังของพัลส์เป็น L เมื่อใช้กฎของแอมแปร์หาสนามแม่เหล็กที่เกิดจากการเปลี่ยนของฟลักซ์ไฟฟ้า $\varnothing_E$ ที่ผ่านวงสี่เหลี่ยมจะได้ว่าฟลักซ์สนามไฟฟ้าที่ผ่านวงสี่เหลี่ยม ที่เวลา t คือ

$$\varnothing_E = \oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = E(\ell c t)$$

ดังนั้น อัตราการเปลี่ยนของฟลักซ์ไฟฟ้า คือ

$$\frac{d\varnothing_E}{dt} = E\ell c$$

ฟลักซ์สนามไฟฟ้าจะเปลี่ยนแปลงเฉพาะช่วงเวลาที่ขอบหลังของพัลส์ สนามไฟฟ้า **E** อยู่นอกวงสี่เหลี่ยมเท่านั้น เมื่อพัลส์ของสนามไฟฟ้า **E** อยู่ภายในวงสี่เหลี่ยม ฟลักซ์สนามไฟฟ้า $\varnothing_E$ จะคงที่และไม่มีสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำอีกต่อไป

ทิศของสนามแม่เหล็กเหนี่ยวนำที่เกิดขึ้นหาได้โดยการพิจารณาให้ฟลักซ์สนามไฟฟ้าสมมูลกับกระแสไฟฟ้าและใช้หลักมือขวา ดังรูปที่ 12.3 (ก) จะได้ว่าที่ขอบซ้ายของวงสี่เหลี่ยมจินตนาการ สนามแม่เหล็กจะมีทิศ +z และเมื่อพิจารณาทำนองเดียวกับการหาอินทิกรัล $\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}$ ตามกรณีแรก อินทิกรัล $\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l}$ รอบวงสี่เหลี่ยมจะมีค่าเท่ากับส่วนที่เกิดจากขอบซ้ายเท่านั้น เมื่อติดตามเส้นทางอินทิกรัลในทิศทวนเข็มนาฬิกาจะได้ว่า

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = B\ell$$

แทนผลนี้โดยใช้กฎของแอมแปร์

$$\oint \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = B\ell = \mu_0\epsilon_0\frac{d\varnothing_E}{dt}$$

$$B\ell = \mu_0\epsilon_0 E\ell c$$

$$B = \mu_0\epsilon_0 E c \qquad \text{.......... (12-10)}$$

สรุปได้ว่าเมื่อมีพัลส์สนามไฟฟ้าต้นกำเนิดจะมีพัลส์สนามแม่เหล็กเกิดร่วมอยู่ด้วย สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กจะตั้งฉากซึ่งกันและกันและตั้งฉากกับทิศที่พัลส์สนามไฟฟ้าเคลื่อนที่ไปและสนามแม่เหล็กมีค่าเป็น $\mu_0\epsilon_0 c$ เท่าของสนามไฟฟ้า

ยิ่งกว่านั้นเมื่อเปรียบเทียบรูปที่ 12.6 กับรูปที่ 12.7 (ข) ทิศของสนามไฟฟ้า **E** , ทิศของสนามแม่เหล็ก **B** และทิศการแผ่ของพัลส์ของสนามซึ่งสัมพันธ์กันตามรูปทั้งสอง มีทิศไปทางเดียวกัน ขนาดจึงต้องเท่ากันด้วย แทนสมการ (12-9) ในสมการ (12-10) จะได้ว่า

$$\frac{E}{c} = \mu_0 \in_0 E\, c$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \in_0}} \qquad \text{.......... (12-11)}$$

อัตราเร็วของพัลส์แม่เหล็กไฟฟ้าขึ้นกับค่าคงที่ทางแม่เหล็กไฟฟ้า 2 ค่า เท่านั้น

$$\in_0 = 8.854\ 18782 \times 10^{-12} C^2/m^2.N$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ N.s^2/C^2$$

ดังนั้นจะได้

$$c = 2.99792458 \times 10^8\ m/s \approx 3 \times 10^8\ m/s$$

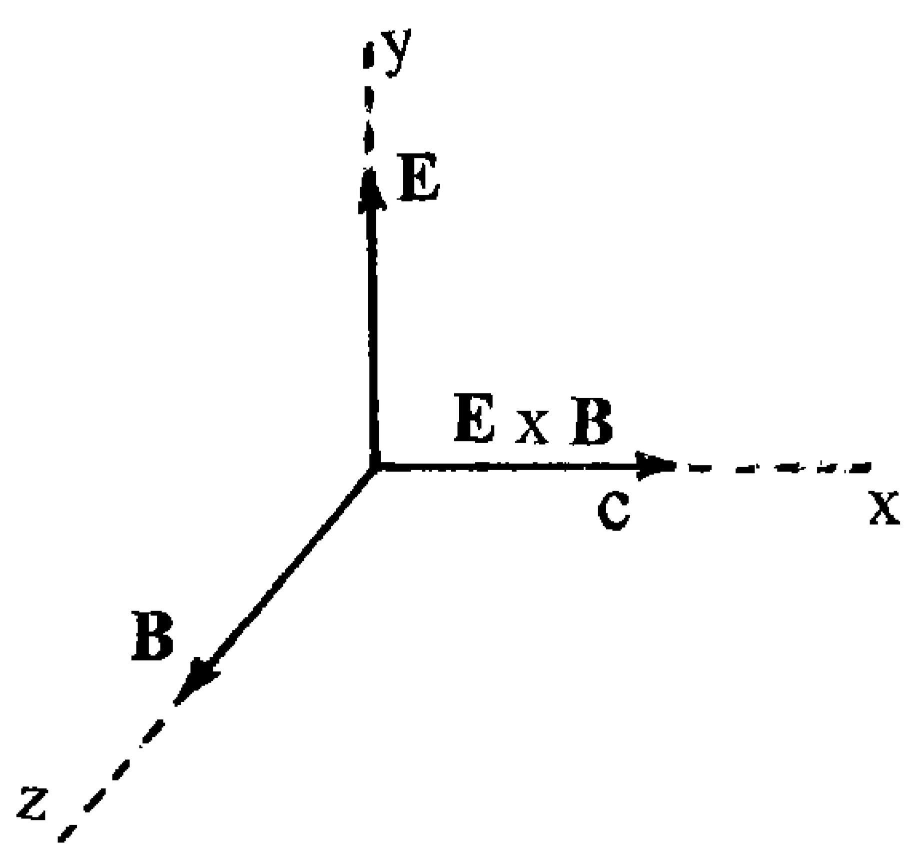
อัตราเร็วของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าจึงมีค่าเท่ากับอัตราเร็วของแสง หรือกล่าวได้ว่าแสงเป็นคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าแบบหนึ่ง

วิธีการหาว่า สนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้าแผ่ออกไปในที่ว่างด้วยอัตราเร็วของแสง โดยไม่ต้องอาศัยประจุไฟฟ้าและกระแสไฟฟ้าโดยวิธีการดังที่กล่าวมา เราได้สมมุติว่าสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กเปลี่ยนตามเวลาด้วยรูปแบบที่ง่ายที่สุด คือ สนามเกิดขึ้นและหมดไปในทันทีที่ขอบหน้าและขอบหลังของพัลส์สนามคงที่ โดยทั่วไปแล้วสนามแม่เหล็กไฟฟ้าจะเปลี่ยนแปลงตามเวลา มีลักษณะเฉพาะเป็นคลื่นความถี่เดียวแบบไซน์ (monochromatic sinusoidal) อย่างไรก็ตามสนามเหล่านั้นก็ไม่ได้มีเงื่อนไขพื้นฐานใหม่เพื่อการพิจารณาเพิ่มขึ้นแต่อย่างใด เพราะสนามใดที่เปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง ก็คือ การเรียงลำดับของพัลส์คงที่ขนาดสั้น หรือสเตปฟังก์ชัน (step function) โดยประมาณนั่นเอง

คุณสมบัติพื้นฐานบางประการของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่วิเคราะห์ได้จากสมการแมกซ์เวลล์ สรุปได้ดังนี้

- คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเกิดขึ้นในที่ว่าง (empty space) ได้ เนื่องจากฟลักซ์ไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงสร้างสนามแม่เหล็ก (กฎของแอมแปร์) และฟลักซ์แม่เหล็กที่เปลี่ยนแปลงสร้างสนามไฟฟ้า (กฎของฟาราเดย์)

- คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นคลื่นระนาบตามขวาง (transverse plane wave) ขณะหนึ่ง ณ ที่ใด ๆ ในอวกาศสนามแม่เหล็ก **B** และสนามไฟฟ้า **E** จะตั้งฉากกันเสมอ และอยู่ในระนาบที่ตั้งฉากกับทิศการแผ่ของคลื่น ดังรูปที่ 12.8



รูปที่ 12.8

*ทิศทางสัมพัทธ์ของสนามไฟฟ้า **E** และสนามแม่เหล็ก **B** และทิศทางการแผ่ของคลื่น c*

● อัตราเร็วของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสุญญากาศ คือ

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

● ขนาดสัมพัทธ์ระหว่างสนามไฟฟ้า **E** และสนามแม่เหล็ก **B** ขณะหนึ่งที่ตำแหน่งใด ๆ ในอวกาศ คือ

$$B = \frac{E}{c}$$

คุณสมบัติของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่แมกซ์เวลล์ทำนายจากสมการของแมกซ์เวลล์ จะตรงกับคุณสมบัติของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าที่ได้ทดลองยืนยันในเวลาต่อมา

12.4 สรุปท้ายบท

หลักพื้นฐานที่สำคัญ

● **กฎของแอมแปร์ที่สมบูรณ์**

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i + \epsilon_0 \mu_0 \frac{d\varnothing_E}{dt} \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (12.3)$$

เทอมที่ 2 ทางขวามือบ่งชี้ว่าฟลักซ์ไฟฟ้าที่เปลี่ยนแปลงจะสร้างวงสนามแม่เหล็กได้เช่นเดียวกับกระแสไฟฟ้า ปริมาณ $\epsilon_0 \frac{d\varnothing_E}{dt}$ อาจเรียกว่า กระแสดิสเพลสเมนต์

ผลที่สำคัญ

● **สมการแมกซ์เวลล์สำหรับแม่เหล็กไฟฟ้าแผนเดิม**

$$\epsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = q \qquad \text{.........} \quad (12.5)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad \text{.........} \quad (12.6)$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\varnothing_B}{dt} \qquad \text{.........} \quad (12.7)$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\varnothing_E}{dt} \qquad \text{.........} \quad (12.8)$$

● **คุณสมบัติบางประการของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า**

- คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าเป็นคลื่นระนาบตามขวาง ขณะหนึ่ง ณ ที่ใด ๆ ในอวกาศ สนามไฟฟ้า **E** และสนามแม่เหล็ก **B** จะตั้งฉากกันเสมอและอยู่ในระนาบที่ตั้งฉากกับทิศการแผ่ของคลื่น

- อัตราเร็วของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสุญญากาศ คือ

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

- ขนาดสัมพัทธ์ระหว่างสนามไฟฟ้า **E** และสนามแม่เหล็ก **B** ขณะหนึ่ง ณ ที่ใด ๆ ในอวกาศ คือ

$$B = \frac{E}{c}$$

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 12

12.1 จงแสดงว่ากระแสดิสเพลสเมนต์ $\epsilon_0(d\varnothing_E/dt)$ มีหน่วยเป็นแอมแปร์

12.2 ให้หากระแสดิสเพลสเมนต์ ตามตัวอย่างที่ 12.1 เมื่อกำหนดรัศมีของแผ่นเพลทเป็น 5 cm และสนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นเพลทเปลี่ยนแปลงในอัตรา 10^{12} V/m.s

12.3 จงแสดงว่ากระแสดิสเพลสเมนต์ในตัวเก็บประจุแผ่นขนานมีรูปเป็น $i_d = C\,(dV/dt)$ เมื่อ C เป็นความจุของตัวเก็บประจุ dV/dt เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างแผ่นเพลทตามเวลา

12.4 ให้หาขนาดของกระแสดิสเพลสเมนต์สูงสุดในตัวเก็บประจุแผ่นขนาน แต่ละแผ่นมีพื้นที่ 0.25 m^2 และห่างกัน 1.0 mm เมื่อให้ความต่างศักย์แบบไซน์คร่อมแผ่นประจุมีแอมพลิจูด $V_m = 2.5$ kV และความถี่ 1.0 kHz

12.5 ให้แรงเคลื่อนไฟฟ้ากระแสสลับ 10 V (ค่ายังผล) ความถี่ f กับวงจร RC ที่มี $R = 10\ \Omega$ และ $C = 20\ \mu F$ จงหากระแสไฟฟ้าจริง (ค่ายังผล) และกระแสดิสเพลสเมนต์ (ค่ายังผล) ในตัวเก็บประจุ เมื่อ (ก) f = 60 Hz (ข) f = 2MHz

12.6 สนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็กนิยามจากสิ่งใด

12.7 สมการแมกซ์เวลล์มีลักษณะสมมาตรระหว่างสนามไฟฟ้า **E** และสนามม่เหล็ก **B** กันอย่างแท้จริงหรือไม่อย่างไร

12.8 จงระบุถึงความแตกต่างที่สำคัญ ระหว่างแหล่งกำเนิดของสนามแม่เหล็กและสนามไฟฟ้า
